

32784 **Analytische Bahnberechnung künstlicher Satelliten**

Schriftliche Prüfung

1. April 2010, 10:00–11:20

1 Quasi-Zenith Satellite System

50%

Das japanische Quasi-Zenith Satellite System (QZSS) ist eine sogenannte *GPS augmentation service*. Es besteht aus 3 Satelliten auf der gleichen Bodenspur. Im beiliegenden Text und in der Bodenspurgrafik erfahren Sie mehr über das QZSS. Es bleiben trotzdem einige Fragen, die Sie mit Ihrem Wissen aus der Vorlesung beantworten können.

- i) Die Satellitenbahn ist geosynchron, d.h. ein Umlauf in einem Tag. Berechnen Sie die lange Halbachse.
- ii) Die Bahn ist laut Text stark abgeplattet (HEO). Welche Bahnneigung würden Sie wählen um zu vermeiden, dass das Perigäum durch die Erdabplattung wegdriftet?
- iii) Und welchen Perigäumswinkel ω müssen Sie wählen?
- iv) In Wirklichkeit war eine Bedingung an das QZSS, dass die Satelliten sich über Zentral-Japan im Zenit befinden. Demzufolge wurde eine Neigung von $I \approx 43^\circ$ genommen. Berechnen Sie die Umlaufperiode des Perigäums.
- v) Wie oft muss man Bahnkorrekturen machen, wenn der Perigäumswinkel nur $\pm 2^\circ$ vom Sollwert abweichen darf?
- vi) Was können Sie über die Knotenlage der drei Satelliten sagen?
- vii) Kann man aus der Form der Achterfigur etwas über die Bahnexzentrizität erfahren? (Hinweis: keine Berechnungen, sondern nur Diskussion.)

2 QZSS Bahnstörungen

25%

Die QZSS-Satelliten erfahren nicht nur durch die Erdabplattung Bahnstörungen.

- i) Wie klassifiziert man die Störkräfte? Benennen Sie mindestens 2 solcher Störkräfte in beiden Kategorien.
- ii) Diskutieren Sie (qualitativ) anhand der Lagrange Planetaren Gleichungen (in Gauss-Form), wie sich ein konstanter atmosphärischer Widerstand auf die QZSS-Bahn auswirkt.
- iii) Durch die Exzentrizität der QZSS-Bahnen ist die atmosphärische Reibung jedoch nicht konstant, sondern hat eher einen 1-mal pro Umlauf Charakter. Wie wirkt sich das aus?

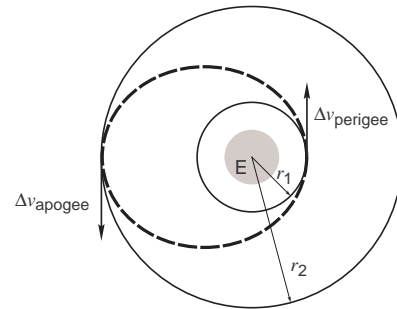
3 Hohmann-Transfer

25%

Ein *Hohmann transfer orbit* bringt einen Satelliten von einer niedrigen in eine höhere Kreisbahn durch zwei sogenannte Δv -*thrusters*. Der erste Schub im Perigäumsdurchgang (der *perigee boost*) bringt den Satelliten in eine elliptische Übergangsbahn. Ein zweiter Schub im Apogäum (der *apogee boost*) macht die Bahn wieder kreisförmig.

Angenommen, die QZSS-Satelliten werden mit einer Rakete hochgebracht, die die Satelliten höchstens in eine niedrige Kreisbahn, z.B. auf Höhe 400 km, bringen kann. Man möchte aber die HEO von QZSS erreichen.

- i) Wie kann man nach dem Hohmann-Prinzip sowohl die Perigäums- als auch die Apogäums-höhe richtig bekommen? (Hinweis: nur qualitative Diskussion.)
- ii) Berechnen Sie mittels der *vis-viva* Gleichung das Energieniveau der kreisförmigen Ausgangsbahn und der endgültigen QZSS-Bahn.
- iii) Geben Sie formelmäßig das notwendige Δv beim *perigee* oder *apogee boost* an.



Hohmann transfer zwischen Kreisbahnen mit Radien r_1 und r_2 .

4 Sonnensynchrone Bahn

Bonus: 10%

Kann die geosynchrone Bahn so weit geneigt sein, dass sie gleichzeitig sonnensynchron wird? Falls ja, berechnen Sie die entsprechende Bahnneigung.

Formeln, Zahlen, usw.

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2(1-5\cos^2 I)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2\cos I$$

$$\dot{M} = n - \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R}{a}\right)^2(3\cos^2 I - 1)$$

$$R = 6378 \text{ km}$$

$$GM = 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$C_{2,0} = -1.08263 \cdot 10^{-3}$$

$$M = E - e \sin E$$

$$n^2 a^3 = GM$$

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

$$\dot{a} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(e \sin \nu f_3 + \frac{p}{r} f_1\right)$$

$$\dot{e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}(\sin \nu f_3 + (\cos E + \cos \nu) f_1)$$

$$\dot{I} = \frac{r}{nab} \cos(\omega + \nu) f_2$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r}{nab \sin I} \sin(\omega + \nu) f_2$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(-\cos \nu f_3 + \left(\frac{r}{p} + 1\right) \sin \nu f_1\right) - \cos I \dot{\Omega}$$

$$\dot{M} = n - \frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos \nu\right) f_3 - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \nu f_1$$

$$\vec{f}_{\text{sol.}} = \chi \frac{\Phi}{c} \left(\frac{\bar{r}_{\odot}}{r_{\odot}}\right)^2 \frac{A}{m} \cos \theta [(1-\epsilon)\vec{e}_{\odot} + 2\epsilon \cos \theta \vec{n}]$$

$$\vec{f}_{\text{drag}} \approx -\frac{1}{2}C_D \rho(\vec{r}, t) \frac{A}{m} |\vec{v}| \vec{v}$$

32784 Analytische Bahnberechnung künstlicher Satelliten

Schriftliche Prüfung: 24. März 2009, 10:00–11:20

keine Hilfsmittel

nur Taschenrechner

1. Molniya

50%

Die russischen Kommunikationssatelliten des Molniya-Systems fliegen in einer besonders exzentrischen Bahn ($e = 0.722$) mit einer Umlaufperiode von 12 Stunden. Das Apogäum wird dadurch über der Nordhalbkugel fixiert, dass die J_2 -Präzession des Perigäums Null ist.

- i)* Erklären Sie den Zusammenhang zwischen wahrer Anomalie ν und exzentrischer Anomalie E mittels einer Grafik.
- ii)* Berechnen Sie (mit der Molniya-Exzentrizität) die zu einer mittleren Anomalie von 90° gehörende wahre und exzentrische Anomalie.
- iii)* Berechnen Sie aus Keplers 3. Gesetz die lange Halbachse sowie Perigäums- und Apogäumshöhe über der Erdoberfläche.
- iv)* Bei welcher Bahnneigung wird die Perigäumspräzession zu Null?
- v)* Skizzieren Sie die Molniya-Bodenspur.

2. GOCE

50%

Der Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer (GOCE) ist seit einer Woche im All. Er fliegt in einem kreisförmigen, sonnensynchronen und fast-polaren Orbit auf 283.5 km Höhe. Das Ziel der Mission ist die Bestimmung des Schwerefeldes der Erde.

- i)* Die GOCE-Bahn ist nicht exakt polar. Berechnen Sie die Bahnneigung, die durch die Sonnensynchronizität bedingt wird.
- ii)* Wegen der extrem niedrigen Höhe erfährt GOCE atmosphärische Reibungseffekte. Diskutieren Sie anhand der Lagrange Planetaren Gleichungen (in Gauss-Form), wie sich der atmosphärische Widerstand auf die Bahn auswirkt.
- iii)* Die sonnensynchrone Satellitenbahn ist im sogenannten *dawn-dusk* Modus: die Bahnnormale zeigt in Richtung Sonne. Erklären Sie mit Hilfe der Lagrange Planetaren Gleichungen (in Gauss-Form), wie sich der Solardruck auf die Bahn auswirkt.
- iv)* Angenommen, die GOCE-Bahn steht exakt senkrecht auf die Verbindungslinie Satellit–Sonne. Erklären Sie die einzelnen Terme in der gegebenen Formel für den Solardruck und vereinfachen Sie die Formel für den GOCE-Fall.
- v)* Gegeben sei der Solarfluss $\Phi \approx 1367 \text{ W/m}^2$: schätzen Sie den Betrag des Solar-drucks ab.

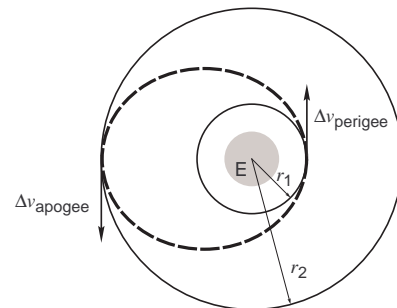
3. Hohmann-Transfer

Bonus: 10%

Ein *Hohmann transfer orbit* bringt einen Satelliten von einer niedrigen in eine höhere Kreisbahn durch zwei sogenannte Δv -*thrusters*. Der erste Schub im Perigäumsdurchgang (der *perigee boost*) bringt den Satelliten in eine elliptische Übergangsbahn. Ein zweiter Schub im Apogäum (der *apogee boost*) macht die Bahn wieder kreisförmig.

Angenommen, die GOCE-Bahn muss wegen erhöhter Sonnenaktivität um 20 km angehoben werden.

- i) Berechnen Sie mittels der *vis-viva* Gleichung das Energieniveau der drei involvierten Bahnen.
- ii) Geben Sie formelmäßig das notwendige Δv beim *perigee boost* an.
- iii) Führen Sie erst dann die Berechnung durch.



Hohmann transfer zwischen Kreisbahnen mit Radien r_1 und r_2 .

Formeln, Zahlen, usw.

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} n C_{2,0} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - 5 \cos^2 I)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2} n C_{2,0} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cos I$$

$$\dot{M} = n - \frac{3}{4} n C_{2,0} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{R}{a}\right)^2 (3 \cos^2 I - 1)$$

$$R = 6378 \text{ km}$$

$$GM = 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$C_{2,0} = -1.08263 \cdot 10^{-3}$$

$$M = E - e \sin E$$

$$n^2 a^3 = GM$$

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

$$\dot{a} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left(e \sin \nu f_3 + \frac{p}{r} f_1 \right)$$

$$\dot{e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} (\sin \nu f_3 + (\cos E + \cos \nu) f_1)$$

$$\dot{I} = \frac{r}{nab} \cos(\omega + \nu) f_2$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r}{nab \sin I} \sin(\omega + \nu) f_2$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(-\cos \nu f_3 + \left(\frac{r}{p} + 1\right) \sin \nu f_1 \right) - \cos I \dot{\Omega}$$

$$\dot{M} = n - \frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos \nu \right) f_3 - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \nu f_1$$

$$\mathbf{f}_{\text{sol.}} = \chi \frac{\Phi}{c} \left(\frac{\bar{r}_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^2 \frac{A}{m} \cos \theta [(1-\epsilon) \mathbf{e}_{\odot} + 2\epsilon \cos \theta \mathbf{n}]$$

$$\mathbf{f}_{\text{drag}} \approx -\frac{1}{2} C_D \rho(\mathbf{r}, t) \frac{A}{m} |\mathbf{v}| \mathbf{v}$$

32784 Analytische Bahnberechnung künstlicher Satelliten

Schriftliche Prüfung: **3. April 2008**, 10:00–11:20

keine Hilfsmittel

nur Taschenrechner

1. Kepler-Elemente

15%

Erklären Sie alle Kepler-Elemente grafisch (also durch eine oder mehr Zeichnungen). Auch der Zusammenhang zwischen wahrer Anomalie ν und exzentrischer Anomalie E soll grafisch erklärt werden.

2. BepiColombo

50%

Die beiliegende Seite enthält Informationen zu der ESA-Mission BEPICOLOMBO. Die Angabe MPO polar orbit 400×1500 km bedeutet, dass das Periherm (also die Periapsis einer Merkur-Umlaufbahn) 400 km und das Apoherm 1500 km über der Merkuroberfläche liegt.

- i) Skizzieren Sie die MPO-Bahn mit den angegebenen Daten und bestimmen Sie mit R_{Merkur} (s. unten) die lange Halbachse und die Exzentrizität.
- ii) Auf der Website wird eine Umlaufperiode der MPO-Bahn von 2.3 h angegeben. Stimmt diese Angabe?
- iii) Bestimmen/Berechnen Sie die mittlere, wahre und exzentrische Anomalien nach einem Viertel Umlauf (gezählt ab Periherm).
- iv) Die MPO-Bahn ist polar. Außerdem ist Merkur so gut wie kugelförmig. Beschreiben Sie in Worten die Bahn und ihre Zeitevolution im Inertialraum.

3. Solardruck

35%

In Erdnähe beträgt der Fluss der Solarteilchen (solar flux) in etwa $\Phi = 1360 \text{ W/m}^2$. In einer Merkurumlaufbahn variiert Φ zwischen 6249 W/m^2 und 14389 W/m^2 , je nachdem ob Merkur im Aphelion oder Perihelion steht. Sonnendruck wirkt sich folgendermassen als Störkraft auf die Satellitenbahn aus:

$$\mathbf{f} = \chi \frac{\Phi}{c} \left(\frac{\bar{r}_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^2 \frac{A}{m} \cos \theta [(1 - \epsilon) \mathbf{e}_{\odot} + 2\epsilon \cos \theta \mathbf{n}] ,$$

mit $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Das Symbol \odot steht hier für die Sonne.

- i) Erklären Sie diese Formel. Erläutern Sie dabei alle vorkommende Variablen und Symbole.
- ii) Vereinfachen Sie die *solar pressure* Formel unter den Annahmen, dass
 - der Satellit nicht im Schatten fliegt,
 - der Abstand zur Sonne kaum variiert,
 - BepiColombo senkrecht angestrahlt wird,
 - wegen weisser Titanium-Beschichtung keine Absorption stattfindet.

Erläutern Sie die Schritte eins nach dem anderen.

- iii)* Berechnen Sie den Solardruck. Falls Angaben zu der Formel fehlen, treffen Sie bitte *plausible* Annahmen.
- iv)* Wenn Sie die Laplace Planetare Gleichungen in Gauss-Form betrachten, könnten Sie sich vorstellen, wie man den Solardruck benutzt um die MPO-Bahn sonnensynchron zu gestalten?

4. Hohmann-Transfer

Bonus: 10%

Die MPO-Bahn entsteht aus der MMO-Bahn durch Hohmann-Transfer. Erklären Sie das Prinzip der Hohmann-Transfer in diesem Fall. Besprechen Sie zunächst qualitativ, wie die Vis-Viva-Gleichung eingesetzt wird. Berechnen Sie danach die Energie-Differenz zwischen MPO und MMO und das benötigte Δv beim Periherm-Boost.

Formeln, Zahlen, usw.

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2(1-5\cos^2 I) \\ \dot{\Omega} &= \frac{3}{2}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2\cos I \\ \dot{M} &= n - \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R}{a}\right)^2(3\cos^2 I - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{\text{Erde}} &= 6378 \text{ km} \\ GM_{\text{Erde}} &\approx 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \\ C_{2,0;\text{Erde}} &= -1.08263 \cdot 10^{-3} \\ R_{\text{Merkur}} &= 2439 \text{ km} \\ GM_{\text{Merkur}} &\approx 0.22 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \\ C_{2,0;\text{Merkur}} &\approx 0 \\ R_{\text{Sonne}} &= 7 \cdot 10^8 \text{ m} \\ GM_{\text{Sonne}} &= 1.3 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M &= E - e \sin E \\ n^2 a^3 &= GM \\ \tan \nu &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} &= -\frac{GM}{2a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(e \sin \nu f_3 + \frac{p}{r}f_1\right) \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}(\sin \nu f_3 + (\cos E + \cos \nu) f_1) \\ \dot{I} &= \frac{r}{nab} \cos(\omega + \nu) f_2 \\ \dot{\Omega} &= \frac{r}{nab \sin I} \sin(\omega + \nu) f_2 \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(-\cos \nu f_3 + \left(\frac{r}{p} + 1\right) \sin \nu f_1\right) - \cos I \dot{\Omega} \\ \dot{M} &= n - \frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos \nu\right) f_3 - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \nu f_1\end{aligned}$$

How Venus Express Reached Operational Orbit

Date (UT)	400/10 N?	Burn Type	Speed Change (m/s)	Duration (s)	Venus Orbit
10 Nov 05	10 N	test	0.500	50	–
11 Nov 05	10 N	launch correction	3.430	211	–
17 Feb 06	400 N	main engine calibration	2.840	154	–
24 Feb 06	10 N	main engine calibration comparison	0.137	14	–
30 Mar 06	10 N	trajectory correction	0.130	14	–
11 Apr 06	400 N	capture	1251.590	3163	330 685 x 662 km, 9 d
15 Apr 06	10 N	pericentre control #1	5.806	504	330 685 x 257 km, 9 d
20 Apr 06	400 N	apocentre lowering #1	200.300	529	99 108 x 259, 40 h
23 Apr 06	400 N	apocentre lowering #2	105.320	343	70 463 x 268 km, 26 h
26 Apr 06	10 N	apocentre lowering #3	9.165	670	68 000 x 268 km, 25 h
30 Apr 06	10 N	apocentre lowering #4	8.035	603	67 000 x 268 km, 24.2 h
3 May 06	10 N	apocentre lowering #5	1.952	233	66 582 x 268 km, 24.02 h
6 May 06	10 N	pericentre control #2	3.101	301	66 582 x 249 km, 24.0 h

trajectory-correction manoeuvres (13, 6 and 2 days before the burn), to correct for minor targeting errors as the spacecraft approached Venus. A 'last chance' emergency manoeuvre slot was reserved at 6 hours before the burn. This upload opportunity was to be used only if a trajectory estimation anomaly was identified in the final hours before passage through pericentre (the closest approach to Venus). In that case, an emergency pericentre-raising burn could be commanded if the path was too low (which would plough the craft into Venus), or conversely a longer insertion burn if it was too high. Fortunately, only the first of these slots, 13 days before arrival, had to be used to perform a tiny correction.

During this phase, Venus Express was gradually commanded into a special, fault-tolerant configuration in which most of the autonomous 'Failure Detection, Isolation and Recovery' functions were disabled, thus transferring some monitoring functions to the Flight Control Team. This minimised the chances of an automatic spacecraft reconfiguration being triggered close to or during the insertion burn, which would have resulted in a missed insertion and no possibility of trying again. The various measures taken to

increase robustness included turning off monitoring of the power system. Most AOCS and data-management system monitoring was either disabled or allowed only at local level; only low-level reconfiguration possible. Rebooting the Processor Module was forbidden and the Mass Memory was also switched off.

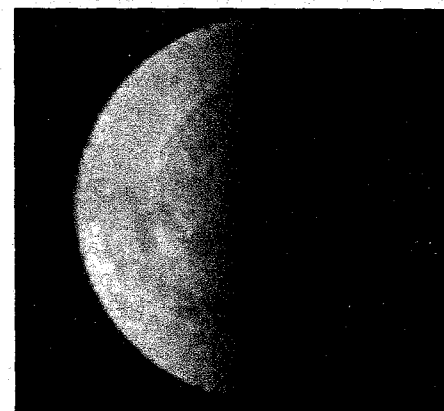
This last point meant that no telemetry could be stored during the burn; in the event of problems, the Flight Control Team would have had very limited information on the possible causes. The last command was sent up to Venus Express 12 hours before the burn.

On 11 April 2006, the spacecraft ignited its main engine at 07:10 UT (at the time, the signal took about 7 minutes to reach Earth). During the burn, contact with the ground via the high-gain antenna was not possible owing to its orientation, but the front low-gain antenna was configured with the redundant transmitter to emit an S-band carrier. The 70 m DSN antenna at Madrid picked up this signal, which was relayed in real-time to ESOC to monitor the spacecraft during most of the manoeuvre.

VMC's first image of the planet's south pole. (ESA/MPS, Katlenburg-Lindau, Germany)

About half an hour into the burn, the spacecraft swung behind Venus, cutting off its signal. It was reacquired on schedule at 07:55 UT, confirming that the capture trajectory was nominal (again, to the relief of controllers). The burn lasted about 50 minutes, and slowed the spacecraft by around 1250 m/s. Venus Express was now in a highly elliptical, 10-day orbit around Venus.

The burn was performed close to quadrature – the Sun and Earth were 90° apart as seen from the spacecraft. Given the spacecraft design, controllers wanted to avoid direct Sun illumination of the craft's cold faces in order to prevent overheating. This meant swapping high-gain antenna usage from



32784 Analytische Bahnberechnung künstlicher Satelliten

Schriftliche Prüfung: 27. Februar 2006, 9:00–10:20

keine Hilfsmittel

nur Taschenrechner

1. Kepler Elemente

35%

- i)* Erklären Sie alle Kepler-Elemente grafisch (also durch eine oder mehr Zeichnungen). Auch der Zusammenhang zwischen wahrer Anomalie ν und exzentrischer Anomalie E soll grafisch erklärt werden.
- ii)* Unter welcher Bedingung ist eine Bahn prograd? Und retrograd?
- iii)* Skizzieren Sie (andeutungsweise) das Bodenmuster einer Wiederholungsbahn mit $I = 60^\circ$ und $e = 0.5$, die 3 Umläufe pro Tag durchführt.

2. Kepler Bahnen

35%

Auf der IKONOS web-site kann man die folgende Information lesen:

Altitude	681 km
Inclination	98.1 degrees
Speed	7 kilometers per second
Revisit frequency	2.9 days at 1-meter resolution; 1.5 days at 1.5-meter resolution
Orbit time	98 minutes
Orbit type	sun-synchronous
Viewing angle	Agile spacecraft - in-track and cross-track
Weight	1600 pounds

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- i)* Leiten Sie mit Keplers 3. Gesetz die Umlaufperiode aus der gegebenen Bahnhöhe (*altitude*) ab. Ist diese Umlaufperiode konsistent zum gegebenen *orbit time*?
- ii)* Entspricht die gegebene Bahnhöhe der Geschwindigkeit (*speed*)?
- iii)* Kann die Bahn tatsächlich bei der gegebenen Bahnhöhe und Neigung sonnen-synchron sein? Sie dürfen annehmen, dass die Bahn kreisförmig ist.

3. Merkurs Periheldrehung

Bonusfrage 10%

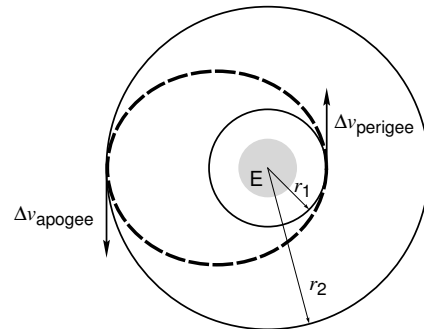
Die Präzession des Perigäums von Merkur von $43''$ pro Jahrhundert wird als klassischer Beweis der allgemeinen Relativitätstheorie aufgefasst. Aber auch in der Newton'schen Mechanik kann Periheldrehung auftreten, nämlich wenn der Zentralkörper abgeplattet ist. Wie gross müsste die gravitationelle Abplattung der Sonne sein um die gemessene Periheldrehung von Merkur zu erklären?

4. Hohmann transfer orbit

30%

Ein *Hohmann transfer orbit* bringt einen Satelliten von einer niedrigen in eine höhere Kreisbahn durch zwei sogenannte Δv -*thrusters*. Der erste Schub im Perigäumsdurchgang (der *perigee boost*) bringt den Satelliten in eine elliptische Übergangsbahn. Ein zweiter Schub im Apogäum (der *apogee boost*) macht die Bahn wieder kreisförmig.

- i) Berechnen Sie das Energieniveau der drei involvierten Bahnen. Benutzen Sie dazu die vis-viva Gleichung. Nehmen Sie an, dass die kreisförmige Anfangsbahn einen Radius von 7000 km hat.
- ii) Geben Sie formelmäßig das notwendige Δv beim *apogee boost* an. Führen Sie erst dann die Berechnung durch.
- iii) Wieviel Zeit vergeht zwischen *perigee boost* und *apogee boost*?



Hohmann transfer zwischen Kreisbahnen mit Radien r_1 und r_2 .

Formeln, Zahlen, usw.

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} n C_{2,0} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - 5 \cos^2 I)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2} n C_{2,0} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cos I$$

$$\dot{M} = n - \frac{3}{4} n C_{2,0} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{R}{a}\right)^2 (3 \cos^2 I - 1)$$

$$C_{2,0} = -1.08263 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{\text{Erde}} = 6378137 \text{ m}$$

$$GM_{\text{Erde}} \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$M = E - e \sin E$$

$$n^2 a^3 = GM$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

$$R_{\text{Sun}} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$GM_{\text{Sonne}} = 1.3 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$a_{\text{Merkur}} = 57.9 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$e_{\text{Merkur}} = 0.2$$

$$I_{\text{Merkur}} = 7^\circ$$

32784 Analytische Bahnberechnung künstlicher Satelliten

Schriftliche Prüfung: **22. September 2006**, 10:00–11:20

keine Hilfsmittel

nur Taschenrechner

1. Kepler Elemente

40%

- i)* Erklären Sie alle Kepler-Elemente grafisch (also durch eine oder mehr Zeichnungen). Auch der Zusammenhang zwischen wahrer Anomalie ν und exzentrischer Anomalie E soll grafisch erklärt werden.
- ii)* Benutzen Sie Kepler's 3. Gesetz um die Kepler-Elemente eines geostationären Satelliten ab zu leiten.
- iii)* Skizzieren Sie das Bodenmuster einer geostationären Umlaufbahn.
- iv)* Falls die (kreisförmige) geostationäre Bahn zusätzlich noch geneigt ist, wird sie als geosynchron bezeichnet. Skizzieren Sie auch das Bodenmuster bei einer Bahnneigung von $I = 60^\circ$.
- v)* Kann die geosynchrone Bahn so weit geneigt sein, dass sie gleichzeitig sonnen-synchron ist? Falls ja, berechnen Sie die entsprechende Bahnneigung.

2. Venus Express

40%

Die Satellitenmission *Venus Express* startete 9.11.2005 ins All. Nach einigen Monaten erreichte der Satellit am 11.4.2006 den Planeten Venus. Durch das Feuern der Hauptdüsen (mit einem Schub von 400 N während 3163 s, also fast eine Stunde bremsen) wurde die Bahn dermaßen korrigiert, dass Venus Express in eine elliptische Venus-Umlaufbahn gelang (*Venus orbit insertion*).

- i)* Die letzte Spalte der beiliegenden Tabelle enthält die Bahndaten. Die genannte Zahlen ($x \times y$ km, z) sind *nicht* etwa die lange und kurze Halbachse. Die Variablen x und y sind die Apozentrum- und Perizentrumhöhe über der Venusoberfläche in km. Stellen Sie diese Größen grafisch dar. Welche Umrechnungsformel leiten Sie daraus ab um die lange Halbachse berechnen zu können?
- ii)* Und wie berechnen Sie die Exzentrizität?
- iii)* Überprüfen Sie für eine beliebige Zeile, dass die Umlaufperiode z der langen Halbachse entspricht.
- iv)* Erläutern Sie anhand der Vis-Viva-Gleichung den Vorgang des *apogee lowering*. An welcher Stelle werden die Düsen gefeuert?
- v)* Berechnen Sie die Energiezustände der Bahnen in den Zeilen 26.4.2006 und 30.4.2006. Entspricht das erwähnte Δv (*speed change*) der Energiedifferenz?
- vi)* Die endgültige Bahn ist polar. Wie lange dauert ein kompletter Umlauf des Perizentrums?

3. Schwerefeldbestimmung des Planeten Venus

20%

Angenommen, Sie arbeiten als *geodetic engineer* bei der europäischen Raumfahrtbehörde ESA. Ihre Aufgabe ist es, die Venus Express als Mission zur Schwerefeldbestimmung des Planeten Venus zu gestalten. Was schlagen Sie vor? Diskutieren Sie Ihre Wahl der Instrumentation, der Bahn, der Observable, usw.

Formeln, Zahlen, usw.

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2(1-5\cos^2 I)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2\cos I$$

$$\dot{M} = n - \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R}{a}\right)^2(3\cos^2 I - 1)$$

$$M = E - e \sin E$$

$$n^2a^3 = GM$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

Erde: $R = 6378\,137\text{ m}$

$$GM \approx 3.986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$C_{2,0} = -1.082\,63 \cdot 10^{-3}$$

Venus: $R = 6052\,000\text{ m}$

$$GM = 3.249 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$C_{2,0} \approx -4.458 \cdot 10^{-6}$$

Sun: $R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$

32784 Analytische Bahnberechnung künstlicher Satelliten

Schriftliche Prüfung: 27. Februar 2006, 9:00–10:20

keine Hilfsmittel

nur Taschenrechner

1. Kepler Elemente 30%

- i)* Erklären Sie alle Kepler-Elemente grafisch (also durch eine oder mehr Zeichnungen). Auch der Zusammenhang zwischen wahrer Anomalie ν und exzentrischer Anomalie E soll grafisch erklärt werden.
- ii)* Berechnen Sie die zu einer mittleren Anomalie von 90° gehörende wahre und exzentrische Anomalie. Benutzen Sie dabei $e = 0.2$.
- iii)* Tun Sie dasselbe nochmals bei einer mittleren Anomalie von 30° .

2. TerraSAR-X 40%

Auf der TERRASAR-X Website kann man die folgende Information lesen:

Start	27. Februar 2007
Ort	Baikonur, Kasachstan
Traegerrakete	DNEPR-1
Orbit	514 km
Inklination	97,44 Grad
Satellitenmasse	ca. 1200 kg
Satellitengroesse	5 m Hoehe x 1,3 m Durchmesser
Energieverbrauch	800 W
Lebensdauer	mindestens 5 Jahre

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- i)* Leiten Sie mit Keplers 3. Gesetz die Umlaufperiode aus der gegebenen Bahnhöhe (Orbit) ab.
- ii)* Liegt eine Wiederholungsbahn vor?
- iii)* Skizzieren Sie (andeutungsweise) das Bodenmuster von TerraSAR-X.
- iv)* Zeigen Sie, dass die Bahn sonnensynchron ist. Sie dürfen annehmen, dass die Bahn kreisförmig ist.

3. Solardruck 40%

Sonnendruck wirkt sich folgendermassen als Störkraft auf die Satellitenbahn aus:

$$\mathbf{f} = \chi P_{\odot} \left(\frac{1 \text{ AU}}{r_{\odot}} \right)^2 \frac{A}{m} \cos \theta [(1 - \epsilon) \mathbf{e}_{\odot} + 2\epsilon \cos \theta \mathbf{n}] ,$$

mit $P_{\odot} \approx 4.56 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$.

- i)* Erklären Sie diese Formel. Erläutern Sie dabei alle vorkommenden Variablen und Symbole.

- ii) Vereinfachen Sie die *solar pressure* Formel unter den Annahmen, dass
- der Satellit nicht im Schatten fliegt,
 - der Abstand zur Sonne kaum variiert,
 - TerraSAR-X senkrecht angestrahlt wird.
- Erläutern Sie die Schritte eins nach dem anderen.
- iii) Erklären Sie in Worten die Bedeutung der Laplace Planetaren Gleichungen in Gauss-Form.
- iv) Erklären Sie anhand der Laplace Planetaren Gleichungen in Gauss-Form qualitativ, wie sich der Solardruck auf die Bahn von TerraSAR-X auswirkt.
- v) Und wie Quantitativ? (Falls periodische Bewegung: Amplitude und Periode; falls Driftbewegung: Driftrate; usw.)

Formeln, Zahlen, usw.

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2(1-5\cos^2 I)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2\cos I$$

$$\dot{M} = n - \frac{3}{4}nC_{2,0}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R}{a}\right)^2(3\cos^2 I - 1)$$

$$C_{2,0} = -1.082\,63 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{\text{Erde}} = 6378\,137 \text{ m}$$

$$GM_{\text{Erde}} \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$M = E - e \sin E$$

$$n^2 a^3 = GM$$

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

$$R_{\text{Sun}} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$GM_{\text{Sonne}} = 1.3 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$\dot{a} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(e \sin \nu f_3 + \frac{p}{r} f_1\right)$$

$$\dot{e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}(\sin \nu f_3 + (\cos E + \cos \nu) f_1)$$

$$\dot{I} = \frac{r}{nab} \cos(\omega + \nu) f_2$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r}{nab \sin I} \sin(\omega + \nu) f_2$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(-\cos \nu f_3 + \left(\frac{r}{p} + 1\right) \sin \nu f_1\right) - \cos I \dot{\Omega}$$

$$\dot{M} = n - \frac{1}{na} \left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos \nu\right) f_3 - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \nu f_1$$